Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 4 febbraio 2020 - Programma precedente

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \left|x^3 - x^2\right| + \frac{5x}{12}$$

determinandone insiemi di definizione, continuità e derivabilità, asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo (oppure estremi superiore e inferiore), punti di massimo e di minimo locali, punti angolosi e di cuspide, intervalli di convessità e punti di flesso.

Soluzione

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, inoltre è continua ovunque, essendo composizione e somma di funzioni continue. Esplicitiamo ora il valore assoluto osservando che

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1) \geq 0 \iff x \geq 1.$$

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + \dfrac{5x}{12} & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 - x^3 + \dfrac{5x}{12} & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Ricordando che il valore assoluto è una funzione derivabile se in suo argomento è diverso da 0, otteniamo che la funzione f è derivabile in ogni punto $x \neq 1$ in quanto composizione e somma di funzioni derivabili. Esaminiamo ora il punto $x = 1$. Derivando per $x \neq 1$ abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + \dfrac{5}{12} & \text{se } x > 1 \\ 2x - 3x^2 + \dfrac{5}{12} & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Dato che la funzione è continua in $x = 1$ possiamo provare a calcolare la derivata destra e sinistra eseguendo i limiti della derivata:

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x - 3x^2 + \frac{5}{12} = 2 - 3 + \frac{5}{12} = \frac{-12+5}{12} = -\frac{7}{12},$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x^2 - 2x + \frac{5}{12} = 3 - 2 + \frac{5}{12} = \frac{12+5}{12} = \frac{17}{12}.$$

Da questo risultato deduciamo che per $x = 1$ abbiamo un punto angoloso. La funzione è quindi derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calcoliamo ora i limiti:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^2 - x^3 + \frac{5x}{12} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^3 - x^2 + \frac{5x}{12} = +\infty.$$

La funzione quindi non è limitata superiormente e, per il teorema di Weierstrass generalizzato, ha minimo. Non ci sono asintoti orizzontali e neanche verticali, dato che f è continua in tutto $\mathbb{R}$. Vediamo ora se ci sono asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x^3 + \frac{5x}{12}}{x} = \lim_{x\to -\infty} x - x^2 + \frac{5}{12} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + \frac{5x}{12}}{x} = \lim_{x\to +\infty} x^2 - x + \frac{5}{12} = +\infty.$$

Non ci sono quindi neanche asintoti obliqui. Cerchiamo ora i punti di massimo e di minimo locali studiando il segno della derivata. Se $x > 1$ avremo che

$$f'(x) > 0 \iff 3x^2 - 2x + \frac{5}{12} > 0.$$

Dato che il discriminante del polinomio $3x^2 - 2x + \frac{5}{12}$ è uguale a $4 - 12\dfrac{5}{12} = -1 < 0$, non ci sono radici reali e il polinomio è sempre positivo. Quindi avremo che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 1$.
Nel caso $x < 1$ invece

$$-3x^2 + 2x + \frac{5}{12} = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12 \cdot \frac{5}{12}}}{-6} = \frac{-2 \pm \sqrt{9}}{-6} \iff x = -\frac{1}{6} \text{ oppure } x = \frac{5}{6}.$$

Ne segue che

$$f'(x) < 0 \text{ se } x < -\frac{1}{6}, \quad f'(x) > 0 \text{ se } -\frac{1}{6} < x < \frac{5}{6}, \quad f'(x) < 0 \text{ se } \frac{5}{6} < x < 1.$$

Riunendo tutti i risultati otteniamo che f è strettamente decrescente in $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right]$, strettamente crescente in $\left[-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$, strettamente decrescente in $\left[\frac{5}{6}, 1\right]$ e strettamente crescente in $[1, +\infty)$. I punti di ascissa $x = -\frac{1}{6}$ e $x = 1$ sono di minimo locale mentre il punto di ascissa $x = \frac{5}{6}$ è di massimo locale. Per determinare il minimo della funzione valutiamola nei punti di minimo locale:

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \frac{5}{12 \cdot 6} = \frac{1}{36} - \frac{1}{36 \cdot 6} - \frac{5}{36 \cdot 2} = \frac{6 - 1 - 15}{36 \cdot 6} = -\frac{10}{216},$$

$$f(1) = 1^3 - 1^2 + \frac{5}{12} = \frac{5}{12}.$$

Il minimo della funzione vale quindi $-\frac{10}{216}$.
Vediamo infine la convessità calcolando la derivata seconda.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 2 & \text{se } x > 1 \\ 2 - 6x & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

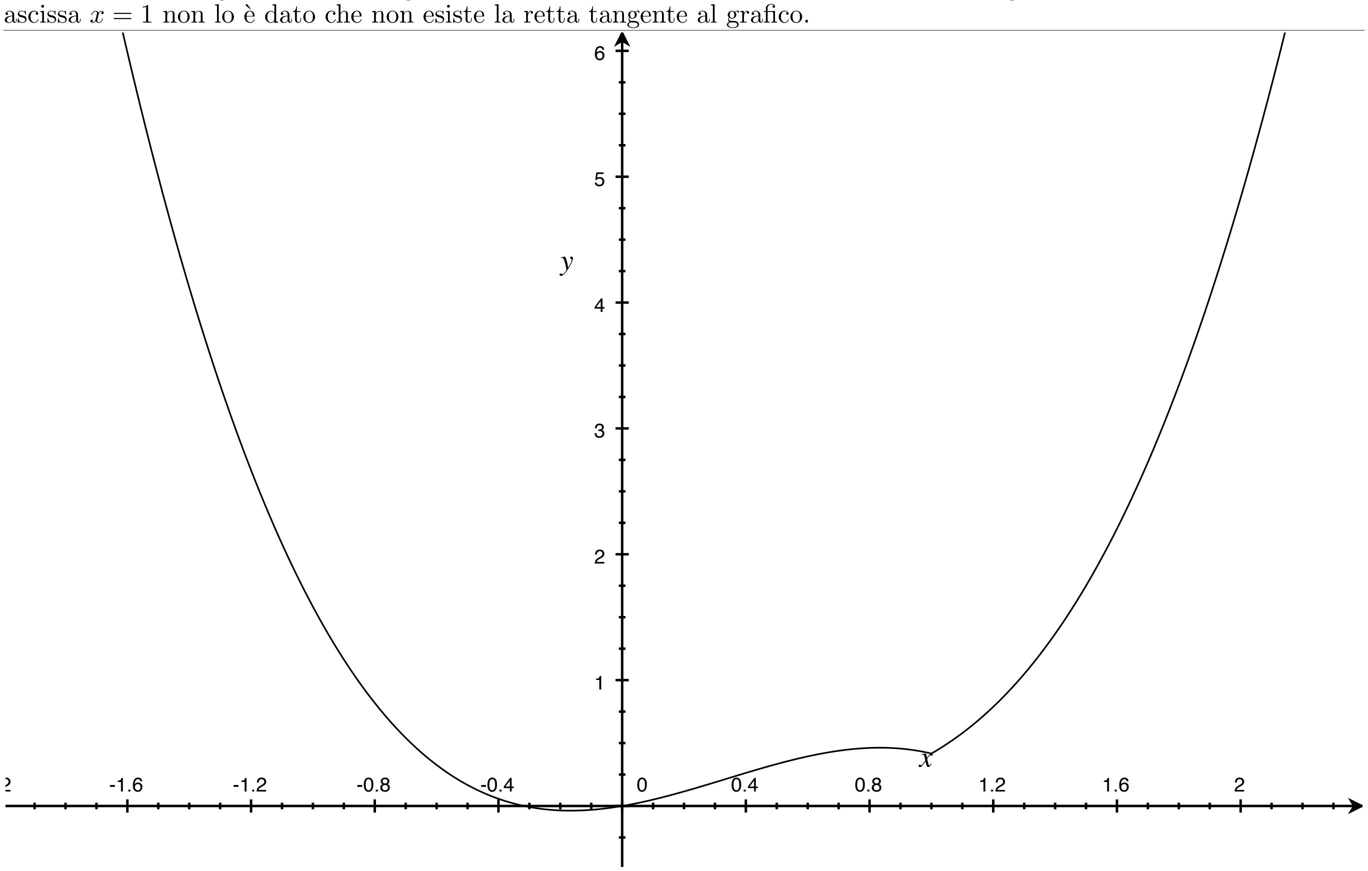
Dato che

$$6x - 2 > 0 \iff x > \frac{1}{3},$$
$$2 - 6x > 0 \iff x < \frac{1}{3}$$

e considerando la diversa espressione della derivata seconda nelle due semirette, otteniamo che

$$f''(x) > 0 \text{ se } x < \frac{1}{3}, \quad f''(x) < 0 \text{ se } \frac{1}{3} < x < 1, \quad f''(x) > 0 \text{ se } x > 1.$$

Nel punto $x = 1$ la derivata seconda non esiste, dato che non esiste neanche la derivata prima. La funzione è quindi convessa in $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, concava in $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ e convessa in $[1, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$ è di flesso mentre il punto di ascissa $x = 1$ non lo è dato che non esiste la retta tangente al grafico.



Esercizio 2 Trovare massimo e minimo della funzione

$$F(x) = \int_{-1}^{x} (t-1)\arctan t\, dt$$

sull'intervallo $[-1,1]$.

Soluzione

La funzione è derivabile su tutto l'intervallo $[-1,1]$ essendo la primitiva di una funzione continua. Per il teorema di Weierstrass F ha massimo e minimo in $[-1,1]$. Determiniamoli valutando la monotonia della funzione. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta

$$F'(x) = (x-1)\arctan x.$$

Dato che

$$x-1>0 \iff x>1, \qquad \arctan x > 0 \iff x > 0,$$

avremo che

$$F'(x) > 0 \text{ se } x<0, \quad F'(x) < 0 \text{ se } 0 < x < 1.$$

Risulta quindi che F è strettamente crescente in $[-1,0]$ e strettamente decrescente in $[0,1]$. La funzione F assumerà quindi il massimo nel punto di ascissa $x=0$. Per il minimo dovremo confrontare il valore assunto da F nei punti di ascissa $x=-1$ e $x=1$. Determiniamo una primitiva di F. Integriamo per parti derivando $\arctan t$ e integrando $t-1$:

$$\int (t-1)\arctan t\, dt = \left(\frac{t^2}{2}-t\right)\arctan t - \int \left(\frac{t^2}{2}-t\right)\frac{1}{t^2+1}\, dt = \left(\frac{t^2}{2}-t\right)\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2-2t}{t^2+1}.$$

Calcoliamo il secondo integrale utilizzando il fatto che

$$\frac{t^2-2t}{t^2+1} = \frac{t^2+1}{t^2+1} + \frac{-1-2t}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1} - \frac{2t}{t^2+1}.$$

Quindi

$$\int (t-1)\arctan t\, dt = \left(\frac{t^2}{2}-t\right)\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2-2t}{t^2+1}\, dt = \frac{t^2-2t}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{t^2+1} - \frac{2t}{t^2+1}\, dt$$

$$= \frac{t^2-2t}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\left(t - \arctan t - \log(1+t^2)\right) + c = \frac{t^2-2t+1}{2}\arctan t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\log(1+t^2) + c.$$

Avremo allora che

$$F(x) = \int_{-1}^{x} (t-1)\arctan t\, dt = \left[\frac{t^2-2t+1}{2}\arctan t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_{-1}^{x}$$

$$= \frac{x^2-2x+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \left(\frac{1+2+1}{2}\arctan(-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log(1+1)\right)$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2.$$

Valutiamo ora la funzione nei 3 punti:

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} (t-1)\arctan t\, dt = 0,$$

$$F(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2,$$

$$F(1) = 0 \cdot \arctan 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{2} - 1,$$

Dato che

$$\frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

abbiamo che il minimo della funzione è assunto nel punto $x=-1$ e vale 0. Il massimo vale invece $F(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2$.

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xe^{x^2-y} \\ y(0) = -\log 2. \end{cases}$$

Determinare poi il minimo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xe^{x^2-y} \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

L'equazione è a variabili separabili. Avremo quindi

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x^2}e^{-y} \iff \frac{dy}{dx}e^y = xe^{x^2}$$

e, integrando

$$\int e^y \, dy = \int xe^{x^2} \, dx + c.$$

Quindi

$$e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Determiniamo ora la costante c imponendo la condizione iniziale $y(0) = -\log 2$, ottenendo

$$e^{-\log 2} = \frac{1}{2}e^0 + c \iff \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \iff c = 0.$$

La soluzione è quindi

$$e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} \iff y = \log\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right) = \log\frac{1}{2} + \log\left(e^{x^2}\right) = x^2 - \log 2.$$

Risolviamo ora il problema parametrico.
Osserviamo che la soluzione esiste sicuramente in un intorno del punto iniziale $x = 0$. Studiamo la monotonia della soluzione valutando il segno della derivata.

$$y' = xe^{x^2-y} > 0 \iff x > 0$$

quindi avremo che la soluzione è strettamente decrescente se $x < 0$ e strettamente crescente se $x > 0$. Ne segue che $x = 0$ è punto di minimo assoluto per la soluzione. Dato che $y(0) = \alpha$ otteniamo che il minimo della soluzione vale α.
In alternativa potevamo risolvere esplicitamente il problema di Cauchy.
L'equazione differenziale è la stessa del problema precedente, quindi la soluzione generale è sempre data da

$$e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \alpha$ otteniamo

$$e^\alpha = \frac{1}{2}e^0 + c \iff c = e^\alpha - \frac{1}{2}.$$

Allora la soluzione risolve l'equazione

$$e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + e^\alpha - \frac{1}{2}$$

quindi

$$y = \log\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + e^\alpha - \frac{1}{2}\right).$$

La soluzione è pari e crescente per $x > 0$, dato che è composizione di funzioni crescenti. Ne segue che $x = 0$ è punto di minimo assoluto e che $y(0) = \alpha$ è il minimo.